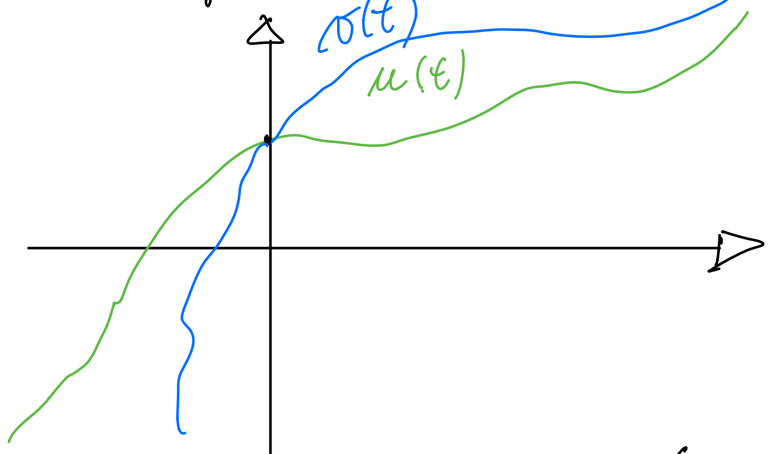
Sopra/sotto - soluzioni "reversed"

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

pbm. di Cauchy con soluz. unica che esiste globalmente.

Sia $v(t)$ sopra soluzione stretta con $v(0)=2$.



Per teorema soprasoluzioni, se $t>0$

$v(t) > u(t)$ fin dove v è definita.

Cosa succede se $t<0$?

Si gira tutto, cioè: $u(t) > v(t)$

per $t<0$ fin dove v è definita.

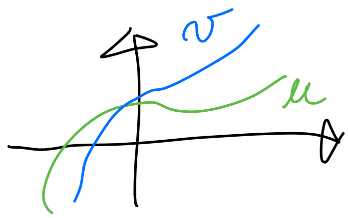
Dim. Se $\exists\, \bar{t} < 0$ tale che

$u(\bar{t}) = v(\bar{t})$, allora

poiché v è soprasoluzione per il teo. soprasoluzioni ho che

$v(t) > u(t) \quad \forall\, t > \bar{t}$

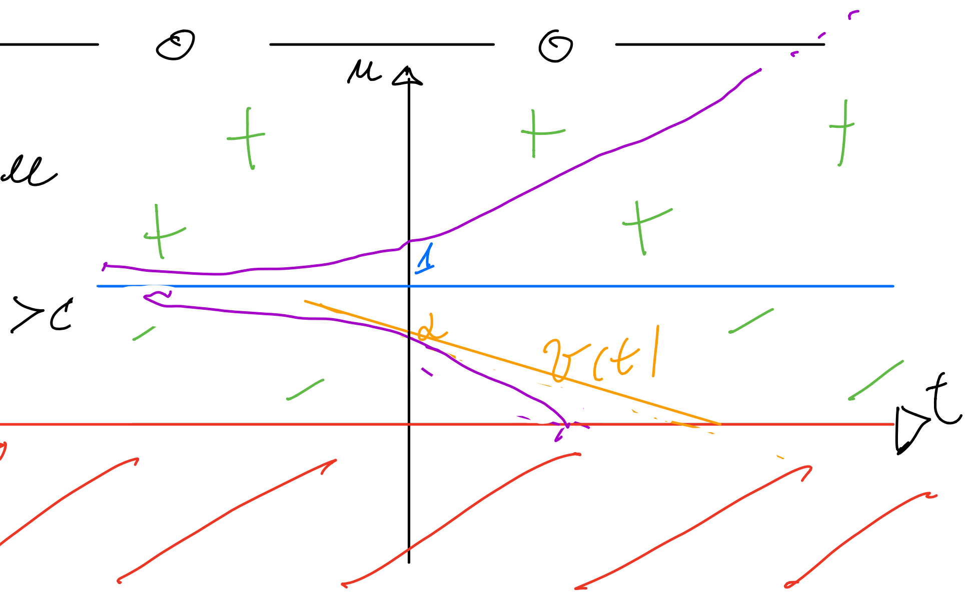
ma $v(0) = u(0)$, assurdo.



per lo stesso motivo, se $\exists$ $t_0 < 0$ t.c. $u(t_0) < v(t_0)$, usando teorema soprasol. da t_0 in poi, avrei $v(t) > u(t)$ $\forall t > t_0$ ASSURDO.

———— o ———— o ————

$$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$



Chi tocca muore!

$\boxed{\text{Fatto 0}}$ $\{u \le 0\}$ non è nell'insieme di definizione delle soluzioni

$\boxed{\text{Fatto 0bis}}$ La soluzione esiste unica.

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ $u \equiv 1$ è soluzione

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Se $\alpha > 1$, che succede nel futuro?

O abbiamo esistenza globale oppure blow-up in tempo finito.

$\boxed{\text{Teorema}}$

Esistenza globale nel caso sublineare

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

f loc. lip. ...

+ f definita opportun.

$$|f(t,u)| \le A(t)|u| + B(t) \quad \forall t \ge 0$$

$\Rightarrow$ la soluzione esiste globalmente nel futuro.

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no problemi, ma anche nel nostro caso ci salviamo

perché se $u_0 > 1$, $u(t) \geq 1 \ \forall t$
e $f(t, u(t))$ è definita
nel rettangolo $\underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{u}{(1, +\infty)}$.

Alternativa Cerco una soprasoluzione.

$v(t) = \alpha \cdot e^t$ $\qquad v(0) = \alpha$.

$$v'(t) = \alpha \cdot e^t \overset{?}{\geq} \log(\alpha \cdot e^t)$$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot e^t \geq \log(\alpha) + t$

Vero per $t \geq 0$.

$\Rightarrow \forall t \geq 0 \quad 1 \leq u(t) \leq \alpha \cdot e^t$

$\Rightarrow u(t)$ esiste globalmente.

$\boxed{\text{Fatto 3}}$ Per monotonia, $\exists \lim_{t \to +\infty} u(t)$.
Quant'è?

$$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in [\alpha, +\infty].$$

Se $\lim_{t\to+\infty} u(t) = \ell < +\infty$

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} \log(u(t)) = \log(\ell).$$

$\Rightarrow \exists \lim_{t\to+\infty} u'(t)$. Ma per il

Teorema dell'asintoto dovrei avere

$\log(\ell) = 0$, ma $\ell \geq \alpha > 1$, assurdo.

$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$.

$\boxed{\text{Fatto 4}}$ Esercizio $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 1^+$

(nel caso $\alpha > 1$).

$\boxed{\text{Fatto 5}}$ Che succede se $\alpha \in (0,1)$?

Per $t \leq 0$ ... $\lim_{t\to-\infty} u(t) = 1^-$ (Ex)

$\boxed{\text{Fatto 6}}$ Che succede nel futuro?

2 possibilità: - esistono globalmente

- break-down in tempo finito.

Ho break down in tempo finito.

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Per assurdo + teo asintoto.

$\boxed{\text{Dim 2}}$ Sparo una soprasoluzione che interseca l'asse t in tempo finito.

$$v(t) = \alpha + \log(\alpha) t$$

$$v'(t) \overset{?}{>} \log\left(\alpha + \log(\alpha) \cdot t\right)$$

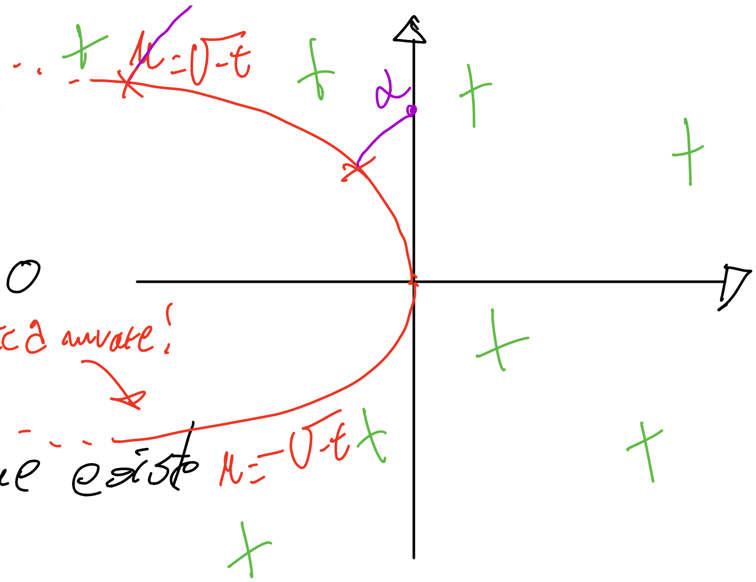
$$\iff \log \alpha > \log\left(\alpha + \log(\alpha) \cdot \overbrace{t}^{\geq 0}\right)$$

$$\iff \cancel{\alpha} > \cancel{\alpha} + \underbrace{\log(\alpha) \cdot t}_{< 0}$$

$\boxed{\text{Ok}}$.

Questa v funziona $\Rightarrow$ ho break down.

$$\begin{cases} u' = \dfrac{1}{u^2+t} \\ u(0) = \alpha \neq 0 \end{cases}$$



$\boxed{\text{FATTO 0}}$ Soluzione esiste unica.

$\boxed{\text{FATTO 1}}$ u soluzione per $\alpha \Rightarrow$ $-u$ soluzione per $-\alpha$.

Posso studiare solo $\alpha > 0$.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ $f(t,u) = \dfrac{1}{u^2+t}$ non è definita
$t \leq 0$

$\iff u^2 = -t \iff u = \pm\sqrt{-t}$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ Per $t \leq 0$ la soluzione ...
ha break down.

Infatti 1) non ha blow up
perché è crescente e
non può attraversare $\sqrt{-t}$
2) Se esiste globalmente

per monotonia $\lim_{t \to -\infty} u(t) = \ell^+$

ma quindi $\exists\, \varepsilon > 0$, $\bar{t} < 0$ t.c.

$\ell \leq u(t) \leq \ell + \varepsilon$ $\forall\, t < \bar{t}$, ma

a un certo punto $u(t) = +\sqrt{-t}$,

e ho break down.

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ $\lim_{t \to +\infty} u(t) = ?$ (esiste per monotonia)

$\lim_{t \to +\infty} u(t) = \ell \in [\alpha, +\infty]$.

Ma non posso usare teo. asintoto!

Idea: se $u(t) \to \ell$, $u'(t) \sim \frac{1}{t + \ell^2}$

$\Rightarrow u(t) \sim \log(t) \Rightarrow \ell = +\infty$.

Voglio dim. che $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.

Dim. Se $u(t) \to \ell \in \mathbb{R}$, $\forall\, t \geq 0$

$u(t) \in [\alpha, \ell]$.

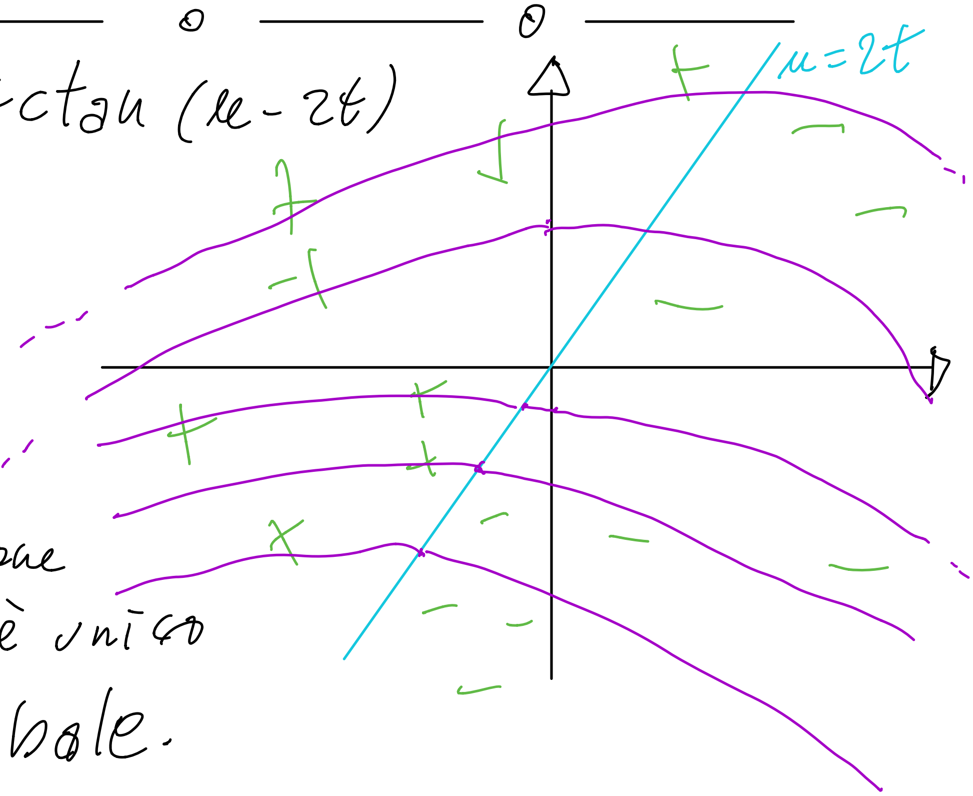
$u'(t) = \frac{1}{u^2 + t} \geq \frac{1}{\ell^2 + t}$

$$\Rightarrow \quad u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\,ds$$

$$\geq \alpha + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{e^2+s}\,ds}_{= \left[\log(e^2+s)\right]_0^t \to +\infty}$$

$\Rightarrow$ per $t \to +\infty$ $\quad u(t) \to +\infty$ per confronto.

$$\begin{cases} u' = \arctan(u-2t) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$



$\boxed{\text{FATTO 1}}$

La soluzione esiste, è unica ed è globale.

$\boxed{\text{FATTO 2}}$ $u' \geq 0 \iff$

$\arctan(u - 2t) \geq 0$

$\iff u \geq 2t$

$\boxed{\text{FATTO 3}}$ $\alpha \leq 0$, $t \geq 0$

La soluzione (esiste glob) e

$\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty$.

Infatti, $u(t) \to \ell \in [-\infty, \alpha]$

per monotonia; se $\ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u' \to \arctan(\ell - 2t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$

per teo. asintoto ho assurdo.

$\boxed{\text{FATTO 3bis}}$ $\alpha \leq 0$, $t < 0$

Esistenza globale, devo capire se tocco la retta $2t$, o se resto sotto.

Dico $v(t) = 2t$ è soprasoluzione

stretta. Infatti:

$$v'(t) = 2 > \arctan(2t-2t) = 0.$$

La soluzione arriva all'asse u decrescendo, quindi deve toccare la retta $2t$ nel passato per forza.

Poiché $\underline{v}$ è sopra sol. stretta ed $\exists\, \bar{t} < 0$ per cui $u(\bar{t}) = v(\bar{t})$ per "soprasol. reversed." prima di $\bar{t}$ vale $u(t) \geq v(t)$.

Inoltre $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$ per teorema asintoto.

$\boxed{\text{FATTO 4}}$ $\alpha > 0$, $t \leq 0$.

u sta sopra la retta $2t$ (stesso motivo di sopra).

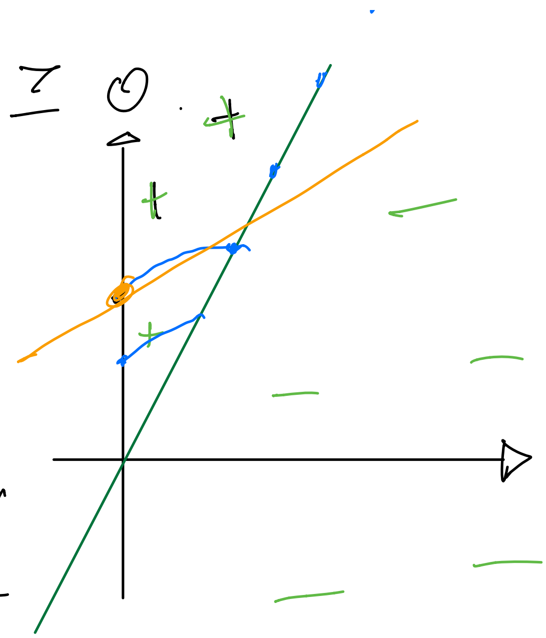
e $\lim_{t \to -\infty} u(t) = -\infty$. (stesso motivo...)

$\boxed{\text{FATTO 5}}$ $\alpha > 0$, $t \geq 0$.

2 chances

1) tocca la retta $2t$ e poi va a $-\infty$

2) sta sempre sopra, esiste glob. e $\to +\infty$.



$\boxed{5.1}$ $\exists\, \alpha_0$ per cui $u(t)$ tocca.

Basta considerare il pbm di Cauchy $\begin{cases} u' = \arctan(u - 2t) \\ u(t_1) = 2t_1 \end{cases}$ con dato iniziale sulla retta

Risolvendo nel passato trovo α_0 per cui la soluz. con dato α_0 tocca.

$\boxed{5.2}$ Se $\alpha \leq \alpha_0$, allora la soluz. tocca.

Sostanzialmente, sennò ho violazione di unicità.

$\boxed{5.3}$ Per ogni α la sol. tocca!

Sparo una soprasoluzione che tocca, come prima con il logaritmo

Provo $$v(t) = \alpha + \pi t$$

$$v'(t) = \pi > \arctan(v - 2t)$$

$$\not\geq \frac{\pi}{2}.$$

Poiché per $t > 0$ $u < v$, e v tocca, prima o poi tocca anche u.

Poi $\lim_{t \to +\infty} u(t) = -\infty$ soliti motivi.